

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 63-11-95

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	3	9	—	10	5	15	15	67

Вариант 1

51

$$9\sqrt{2-\log_2 x} - 2 | 4\log_2 x - 7 | \leq 9\log_2 x - 2 | 4\sqrt{2-\log_2 x} - 7 |$$

$$\sqrt{2-\log_2 x} = t, \quad t \geq 0$$

$$2 - \log_2 x = t^2$$

$$\log_2 x = 2 - t^2$$

$$9t - 2 | 4(2 - t^2) - 7 | \leq 9(2 - t^2) - 2 | 4t - 7 |$$

Определим, когда выражения под модулем обращаются в 0

$$8 - 4t^2 - 7 = 0$$

$$4t - 7 = 0$$

$$-4t^2 + 1 = 0$$

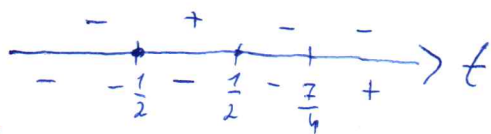
$$t = \frac{7}{4}$$

$$t^2 = \frac{1}{4}$$

$$t = \pm \frac{1}{2}$$



Определим знаки выражений под модулем на промежутках
 $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty); x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]; x \in [\frac{7}{4}; +\infty)$



$$1) \begin{cases} t \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty) \\ 9t - 2(4t^2 - 1) \leq 9(2 - t^2) - 2(-4t + 7) \end{cases}$$

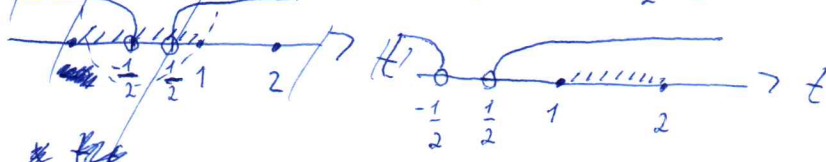
$$9t - 8t^2 + 2 \leq 18 - 9t^2 + 8t - 14$$

$$t^2 + t - 2 \leq 0$$

$$t^2 - 3t + 2 \leq 0$$

$$t_1 = -1, t_2 = 2$$

$$t_1 = 1, t_2 = 2$$



$$t \in [1; 2]$$

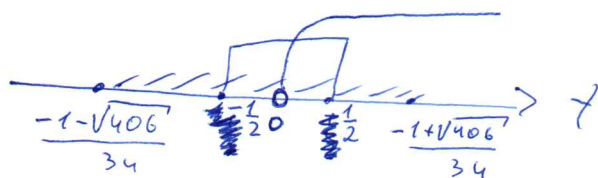
$$2) \begin{cases} t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \\ 9t - 2(-4t^2 + 1) \leq 9(2 - t^2) - 2(-4t + 7) \end{cases}$$

$$9t + 8t^2 - 2 \leq 18 - 9t^2 + 8t - 14$$

$$17t^2 + t - 6 \leq 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 17 \cdot 6 = 406$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{406}}{34}$$



$$t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

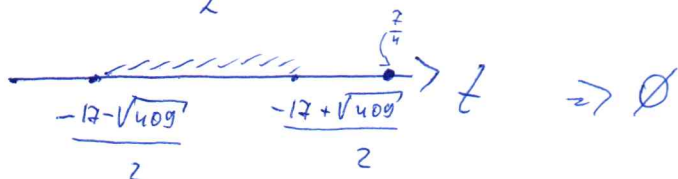
$$3) \begin{cases} t \in \left[\frac{7}{4}; +\infty\right) \\ 9t - 2(4t^2 - 1) \leq 9(2 - t^2) - 2(4t - 7) \end{cases}$$

$$9t - 8t^2 + 2 \leq 18 - 9t^2 - 8t + 14$$

$$t^2 + 17t - 30 \leq 0$$

$$D = 289 + 4 \cdot 30 = 409$$

$$t_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{409}}{2}$$



$$4) \begin{cases} t \in [1; 2] \end{cases}$$

$$2 - \log_2 x = 1 \quad \vee \quad 2 - \log_2 x = 4$$

$$x \in [2; 4]$$

$$\text{Orkes: } x \in [2; 4]$$



52

11-05-452

163-11-95

Чтобы пометить модель для вычисления, упростим модель, рассмотрим квадрат 2×2 :

I случай:

δ	c
c	$\delta/2$

II случай:

z	c
c	$\delta/2$

III случай:

c	$\delta/2$
$\delta/2$	c

отведем I и II случаи, и найдём вероятность расположения цвет.

$\Rightarrow$ клеток, удовлет. усл:

$\frac{2}{3}$ - вероятно, что в верх. лев. углу будет тёмная или белая клетка

$\frac{1}{3}$ - вероятно, что в верх. прав. или лев. серая клетка

$\frac{2}{3}$ - вероятно, что в ниж. прав. белая или тёмная.

Т.к. события несовместны:

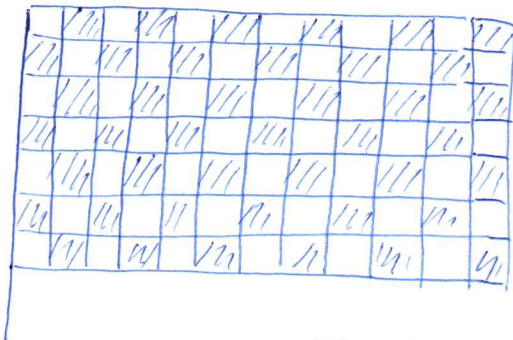
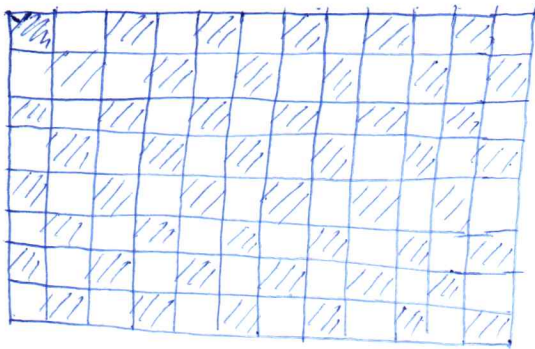
$$P_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

для III случая: $P_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$

$$P_{\text{итог}} = P_1 + P_2 = \frac{2^2}{3^4} + \frac{2^2}{3^4} = \frac{2 \cdot 2^4}{3^4}$$

Тогда, если прямоугольник $8 \times 12 \Rightarrow$ нарисует модель, где закрашенные клетки - белый или тёмный цвет, пустые клетки - серый.

8×12



Тогда, $P_{\text{искомое}} = \frac{2^{48}}{3^{8 \cdot 12}} - 3$

Ответ: $\frac{2^{48}}{3^{8 \cdot 12}} - 3$



2^{48} - кол-во закрашенных клеток (в показателе)

$3^{8 \cdot 12}$ - общее кол-во клеток (в показателе)

53

$$f(x) = ax^2 + (a+1)x + b \geq 0$$

Найти: мин. значение $2a+b+1$

$a=0?$ $a<0?$

Если $f(x) \geq 0 \Rightarrow a > 0, D \leq 0$. Пусть $2a+b+1 = q \Rightarrow b = q - 2a - 1$

$$D = (a+1)^2 - 4 \cdot a \cdot (q - 2a - 1) \leq 0$$

$$D = a^2 + 2a + 1 - 4aq + 8a^2 + 4a \leq 0$$

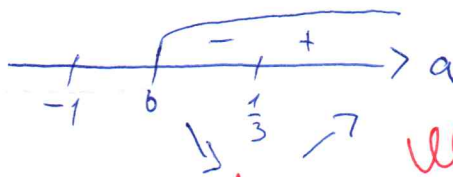
$$D = 9a^2 + 6a + 1 - 4aq \leq 0$$

$$q \geq \frac{(3a+1)^2}{4a}$$

Исследуем $f(a) = \frac{(3a+1)^2}{4a}$, она непрерывна и $\nearrow$, значит наименьшее значение аргумента соответствует наименьшее значение функции.

$$f'(a) = \frac{2(3a+1) \cdot 4a - (3a+1)^2 \cdot 4}{16a^2} = \frac{8a(3a+1) - 4(3a+1)^2}{16a^2} = \frac{(3a+1)(2a - 3a - 1)}{4a^2}$$

$$\frac{(3a+1)(-a-1)}{4a^2} = 0$$



или $b=0$

$b=?$

Наименьшее значение достигается в $(\cdot) \frac{1}{3}$; $f(\frac{1}{3}) = 3 \Rightarrow q \geq 3$,
мин. значение $= 3$

Ответ: 3

55

Дано:

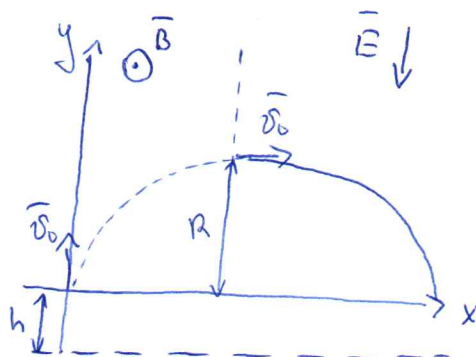
m

q

$$h(t_0) = h$$

Найти:

t



1. В магнитном поле:

Траектория движения частицы - окружность, т.е. она влетела в поле $\perp$ -но линиям индукции. Наивысшей точкой полета будет радиус окружности.

По закону Лоренца: $F_L = q v B$

q - заряд частицы

v - скорость частицы

B - индукция м.п.

2. Система находится в ИСО, связанной с Землей, частицу можно считать за материальную точку.

Запишем II закон Ньютона для частицы относительно высоты h

$$\vec{F}_L = m \vec{a}_x$$

$$\text{Ох: } q v_0 B = m \cdot \frac{v_0^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m v_0}{q B}$$



55 Продолжение:

11-05-452

163-11-95

Период обращения частицы можно найти по формуле

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{qB} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB}$$

До попадания в эл. поле частица пролетит $\frac{1}{4}$ окр-сти, т.е. совершит $\frac{1}{4} T = \frac{\pi m}{2qB} = \tau_1$

3. Частица оканчивает снова на высоте h т.е. $t = \tau_1 + \tau_2$

4. В электрическом поле: на частицу будет действовать $F_{эл} = qE$, траектория движения - парабола.

По II закону Ньютона:

$$\vec{F}_{эл} = m\vec{a}_y$$

$$\text{отсюда: } a_y = \frac{qE}{m}$$

Движение частицы можно описать уравнением: $y = y_0 + \vec{v}_y \tau_2 + \frac{a_y \tau_2^2}{2}$

$$h = (h+R) + 0 - \frac{qE \tau_2^2}{2}$$

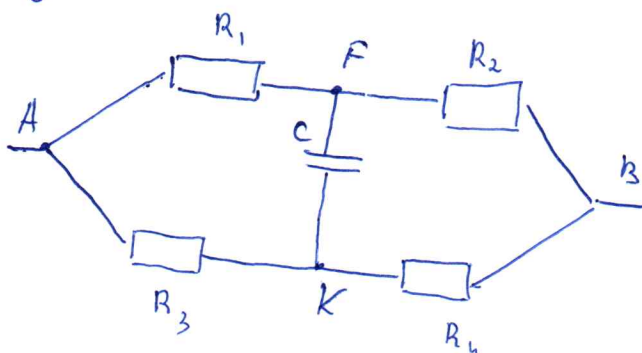
$$R = \frac{qE \tau_2^2}{2m}$$

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{2mR}{qE}}$$

$$t = \frac{\pi m}{2qB} + \sqrt{\frac{2mR}{qE}}$$

Ответ: $\frac{\pi m}{2qB} + \sqrt{\frac{2mR}{qE}}$

56



Дано: $R_1 = 10 \Omega$

$R_2 = 20 \Omega$

$R_3 = 30 \Omega$

$R_4 = 40 \Omega$

$U_0 = 210 \text{ В}$

$C = 200 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$

$I = ?$

1. $q_c = C \cdot U_c$

2. $R_{12} = R_1 + R_2 = 30 \Omega$

$R_{34} = R_3 + R_4 = 70 \Omega$

$R_0 = \frac{R_{12} \cdot R_{34}}{R_{12} + R_{34}} = 21 \Omega$

3. По закону Ома для полной цепи: $I_0 = \frac{U_0}{R_0}$

$I_0 = \frac{210}{21} = 10 \text{ А}$

4. $\begin{cases} I_{12} R_{12} = I_{34} R_{34} \\ I_{12} + I_{34} = 10 \text{ А} \end{cases} \Rightarrow \frac{I_{12}}{I_{34}} = \frac{R_{34}}{R_{12}} = \frac{7}{3}$

Значит, $I_{12} \approx 7 \text{ Ом}$; $I_{34} \approx 3 \text{ Ом}$

5. $U_{12} = U_{34} = U_A$ При распределении потенциалов получаем, что
 $U_A - U_F = I_1 R_1 \Rightarrow$
 $U_A - U_K = I_3 R_3$
 $U_C = U_F - U_K = 0,03 \text{ В}$
 $q_c = 200 \cdot 10^{-6} \cdot 0,03 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Кл} = 6 \text{ мк Кл}$

Ответ: 6 мк Кл

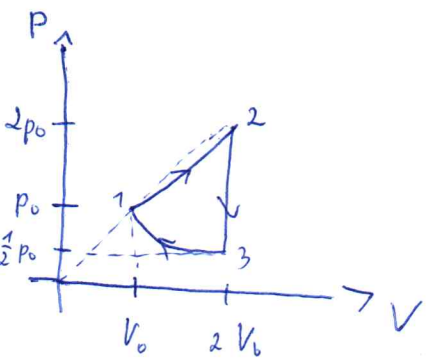
57 $\eta - ?$

[1-2] опис-ли процесс $T \propto V^2$, по закону Менделеева-Клапейрона:

$pV = \nu RT$
 $pV = \nu R k V^2$
 $p = \nu R k V$

[2-3] $V = \text{const}$, по закону Шарля: $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}$

[3-1] $T = \text{const}$, по закону Бойля-Мариотта: $p_3 V_3 = p_1 V_1$; $\frac{V_3}{V_1} = 2$



$2p_3 V_1 = p_1 V_1$
 $2p_3 = p_1$

1. $\eta = 1 - \frac{Q_X}{Q_H}$

$\odot Q_H = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{3}{2} (4p_0 V_0 - p_0 V_0) + \frac{p_0 + 2p_0}{2} \cdot V_0 =$
 $= \frac{3}{2} \cdot 3p_0 V_0 + \frac{3p_0 V_0}{2} = 3A_{12} + A_{12} = 4A_{12}$, но так $A_{22} = 2,16 A_{31}$
 $4A_{12} = 8,64 A_{31}$

$\odot Q_X = Q_{23} + Q_{31} = \Delta U_{23} + A_{31} = \frac{3}{2} (4p_0 V_0 - 2p_0 V_0) + A_{31} = 3A_{12} + A_{31} = 7,48 A_{31}$
 $\eta = 1 - \frac{7,48 A_{31}}{8,64 A_{31}} = 0,134 \approx 13,4 \%$

Ответ: $13,4 \%$



58

$$D_p = -4 \text{ Dтр}$$

$$d_1 = 5 \text{ cm}$$

$$d_2 = 20 \text{ cm}$$

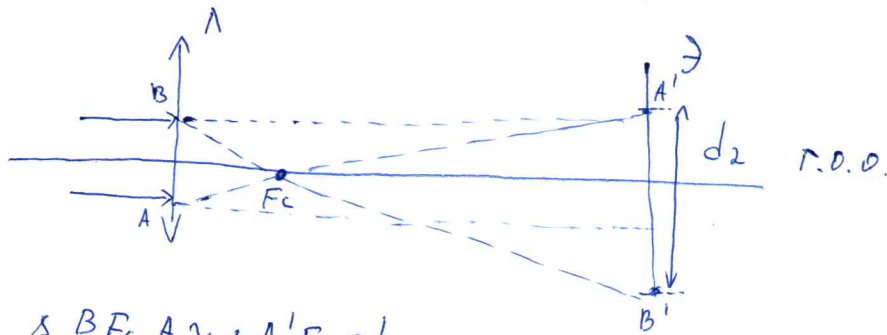
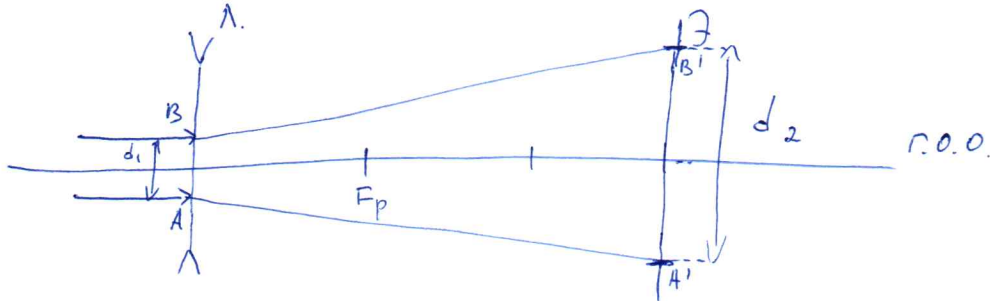
$$D_c = ?$$

11-05-452

63-11-95

$$\frac{1}{F_p} = D_p \Rightarrow F_p = \frac{1}{D_p} = -0,25 \text{ m} = -25 \text{ cm.}$$

$$f_p = 3 F_p$$



$$\triangle B F_c A \sim \triangle A' F_c B'$$

$$f_c = 5 F_p$$

$$F_c = \frac{5}{3} F_p \Rightarrow D_c = \frac{3}{5} F_p = 6,17 \text{ Dтр.}$$

ответ: 6,17 Dтр.